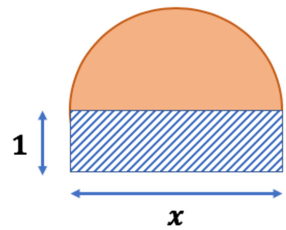
ÉVALUATION n°4 – CORRIGÉ	18 novembre 2019	2^{nde} 5

Exercice n°1 : Soit un triangle rectangle dont les deux côtés perpendiculaires mesurent x et $2x$.
a) Démontrer que la longueur de l'hypoténuse est $x\sqrt{5}$.
Théorème de Pythagore : Le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. Si h la longueur de l'hypoténuse alors on peut écrire que :
$h^2 = x^2 + (2x)^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2$. Donc $h = \sqrt{5x^2} = \sqrt{5}\sqrt{x^2} = x\sqrt{5}$.
b) Pour quelle valeur de x, l'aire du triangle est égale au périmètre du triangle ?
Le périmètre du triangle est $x + 2x + x\sqrt{5} = 3x + x\sqrt{5} = x(3 + \sqrt{5})$.
L'aire du triangle rectangle est $\frac{x \times 2x}{2} = x^2$.
L'aire et le périmètre du triangle ont la même valeur si et seulement si : $x^2 = x\left(3 + \sqrt{5}\right)$
L'équation précédente se simplifie en $x = 3 + \sqrt{5}$.

Exercice n°2 : Une salle de sports propose deux formules à ses clients : 13,50 € par séance et sans abonnement ou 8,40 € par séance avec un abonnement annuel de 51 €. À partir de combien de séances faites sur une année a-t-on intérêt à choisir la formule avec abonnement ?

Soit x le nombre de séances auxquelles participe une personne.
1ère formule : le coût total de x séances est $13{,}5x$.
2ème formule (avec abonnement) : le coût de x séances est $8{,}4x + 51$.
Si on ne suit que peu de séances, il est clair que la formule avec abonnement à 51 € n'est pas intéressante. Soit n le nombre de séances à partir duquel la 2ème formule est plus intéressante. Cette situation correspond à l'inéquation : $8{,}4n + 51 < 13{,}5n$ soit $51 < 13{,}5n - 8{,}4n$ ce qui donne $51 < 5{,}1n$, c'est-à-dire $n > \frac{51}{5{,}1}$. Or $\frac{51}{5{,}1} = 10$. Conclusion à partir de la 11ème séance, la formule avec abonnement est moins chère.

Exercice n°3 : a) Résoudre l'inéquation : $8 - \pi x \geq 0$.



$8 - \pi x \geq 0$ est équivalent à $8 \geq \pi x$ soit $\frac{8}{\pi} > x$ qu'il est plus facile d'écrire sous la forme : $x < \frac{8}{\pi}$. La solution de l'inéquation est l'intervalle $[0, \frac{8}{\pi}]$

b) Exprimer l'aire du rectangle et du demi-disque en fonction de x.
L'aire du rectangle est $1 \times x = x$.
Sachant que le rayon du demi-disque est $\frac{x}{2}$ et que l'aire d'un disque de rayon r est donnée parla formule πr^2, il vient que l'aire du demi-disque est $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{8}$

c) Montrer que chercher les valeurs de x pour lesquelles l'aire du rectangle est supérieure à l'aire du demi-disque revient à résoudre l'inéquation $8x \geq \pi x^2$.
L'aire du rectangle est supérieure à l'aire du demi-disque si et seulement si $x \geq \frac{\pi x^2}{8}$. En multipliant par 8 les deux membres de l'inégalité, on obtient $8x \geq \pi x^2$.

d) Démontrer que cette inéquation est équivalente à l'inéquation : $x(8 - \pi x) \geq 0$. La résoudre.
Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$$8x \geq \pi x^2$$
$$8x - \pi x^2 \geq \pi x^2 - \pi x^2$$

$$8x - \pi x^2 \geq 0$$
$$x(8 - \pi x) \geq 0$$

Sachant que x est une longueur, x est nécessairement positif. Pour que le produit $x(8 - \pi x)$ soit positif, il faut donc $8 - \pi x$ soit aussi positif. D'après la question a), on sait que $8 - \pi x \geq 0$ si et seulement si $x \leq \frac{\pi}{8}$

Exercice n°4 : Quel même nombre entier relatif x faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{4}{9}$ pour obtenir $\frac{9}{4}$?

Soit n cet entier relatif que l'on cherche. D'après la question posée, n doit être solution de l'équation :

$$\frac{4+n}{9+n} = \frac{9}{4}$$

Cette équation est équivalente à $4(4+n) = 9(9+n)$ car l'égalité des deux fractions revient à l'égalité des produits en croix. On développe l'équation et on obtient :

$16 + 4n = 81 + 9n$, soit $4n - 9n = 81 - 16$, ce qui donne $-5n = 65$, puis $n = -13$.

Exercice n°5 : Résoudre les inéquations : $a)$ $4x - 3 \geq x + \frac{2}{3}$ b) $(2x-1)(3-x) > 0$

a) Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$$4x - 3 \geq x + \frac{2}{3}$$
$$4x - 3 - x \geq \frac{2}{3}$$
$$3x - 3 \geq \frac{2}{3}$$
$$3x \geq \frac{2}{3} + 3$$
$$3x \geq \frac{11}{3}$$
$$x \geq \frac{11}{9}$$

La solution de l'inéquation est $\left[\frac{11}{9} ; +\infty\right[$

b) Pour déterminer les conditions que doit respecter x afin que $(2x-1)(3-x) > 0$, on étudie séparément les signes des expressions $2x - 1$ et $3 - x$ et on construit le tableau des signes.

$2x - 1 > 0$ si et seulement si $x > \frac{1}{2}$.

$3 - x > 0$ si et seulement si $x < 3$.

D'après le tableau des signes on peut conclure que la solution est l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 3\right[$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-1)(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	