**Exercice n°1** (2 points) : Écrire le nombre suivant $\frac{(3^4)^7}{2^{28} \times 5^{28}}$ sous la forme $a^n$, où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{(3^4)^7}{2^{28} \times 5^{28}} = \frac{3^{28}}{10^{28}} = 0{,}3^{28}$$

**Exercice n°2** (3 points) : L'étoile la plus proche de la Terre est Proxima du Centaure, située à quarante mille milliards de kilomètres de la Terre. Quelle serait la durée du voyage (exprimée en années) d'une fusée pour atteindre cette étoile s'il se déplaçait à une vitesse de cent mille kilomètres par heure ?

La distance entre la Terre et l'étoile est $d = 4 \times 10^{13}$ km

La vitesse du vaisseau est $v = 10^5$ km.h$^{-1}$

Le temps du trajet serait donc $t = \frac{d}{v} = \frac{4\times10^{13}}{10^5} = 4 \times 10^8$ heures.

Une année moyenne équivaut à 365,25 jours de 24 heures chacun, soit un total de 8 766 heures

Le temps du trajet exprimé en années serait donc de $\frac{4\times10^8}{8\,766}$, soit environ 45 631 années.

**Exercice n°3** (4 points) **:** On considère les deux nombres : $A = \frac{777\,777\,775}{777\,777\,774}$ $B = \frac{777\,777\,774}{777\,777\,775}$

1. Comparer A et B

   $777\,777\,775 > 777\,777\,774$ donc A > 1 et B < 1

2. Calculer $C = A - 1$ et $D = 1 - B$

$$C = \frac{777\,777\,775}{777\,777\,774} - 1 = \frac{777\,777\,775 - 777\,777\,774}{777\,777\,774} = \frac{1}{777\,777\,774}$$

$$D = 1 - \frac{777\,777\,774}{777\,777\,775} = \frac{777\,777\,775 - 777\,777\,774}{777\,777\,775} = \frac{1}{777\,777\,775}$$

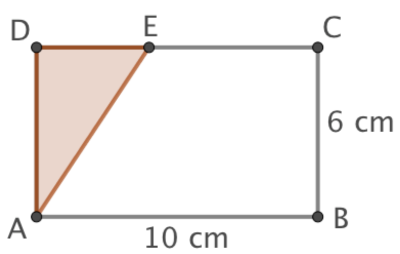
3. Comparer C et D

   Le dénominateur de C est inférieur au dénominateur de D donc C > D.

4. Des deux nombres A et B, quel est le plus proche de 1 ? Justifier.

   $C > D \Longrightarrow A - 1 > 1 - B$ donc B est plus proche de 1 que ne l'est A.

**Exercice n°4** (3 points) **:** ABCD est un rectangle. E est un point mobile sur le segment [DC]. On souhaite placer le point E de telle manière que l'aire du triangle AED soit inférieure ou égale au quart de l'aire de ABCD. Déterminer toutes les positions possibles pour E.




L'aire du rectangle est $AD \times AB = 10 \times 6 = 60$.

L'aire du triangle est $\frac{1}{2} \times AD \times DE = \frac{1}{2} \times 6 \times DE = 3 \times DE$.

La condition « l'aire de AED inférieure ou égale au quart de l'aire de ABCD » s'exprime par l'inéquation : $3 \times DE \leq \frac{1}{4} \times 60$, soit $3 \times DE \leq 15$, ce qui donne $DE \leq 5$.

**Exercice n°5** (4 points) **:** Une voiture se trouve juste derrière un camion au moment où le conducteur de la voiture s'arrête sur une aire de repos. Il se repose 10 minutes puis repart et règle son régulateur de vitesse sur 110 km.h$^{-1}$. De son côté, le camion a une vitesse constante de 90 km.h$^{-1}$ durant tout le trajet. On considère que les temps de décélération et d'accélération de la voiture sont négligeables. Au bout de combien de temps et de combien de kilomètres, la voiture rattrapera-t-elle le camion ?

La distance parcourue par le camion pendant les 10 minutes de repos de la voiture : Sachant que le camion roule à 90 km.h$^{-1}$ et que 10 minutes sont équivalentes à $\frac{1}{6}$ d'heure, il aura parcouru la distance de $\frac{1}{6} \times 90 = 15$ km.

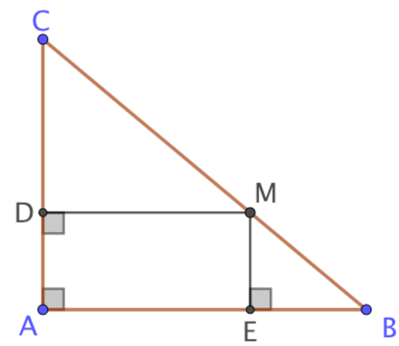
Soit t le temps que va mettre la voiture à rattraper le camion. La voiture roulant à 110 km.h$^{-1}$ aura parcouru une distance de $110 \times t$. Dans le même temps le camion roulant à 90 km.h$^{-1}$ aura parcouru une distance de $90 \times t$.

On peut donc écrire l'équation : $110 \times t = 90 \times t + 15$, ce qui donne $20 \times t = 15$, soit $t = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ d'heure. La voiture aura donc rattrapé le camion en 45 minutes. Pendant ce temps elle aura parcouru la distance de $110 \times \frac{3}{4} = 82{,}5$ km.

**Exercice n°6** (2 points) **:** Calculer $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5}) - (\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 - 2}{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{7-5-2}{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = 0$$

**Exercice n°7** (6 points) **:** Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 10$ et $AC = 7$. Soit M un point mobile sur le segment [BC]. Les points E et E sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AC) et (AB). On pose $AE = x$ et on définit la fonction $f$ qui à $x$ associe l'aire du rectangle AEMD.




1. Quel est le domaine de définition de la fonction $f$ ?

Le domaine de définition de la fonction $f$ est $[0; 10]$

2. Exprimer la distance AD en fonction de $x$ à l'aide du théorème de Thalès.

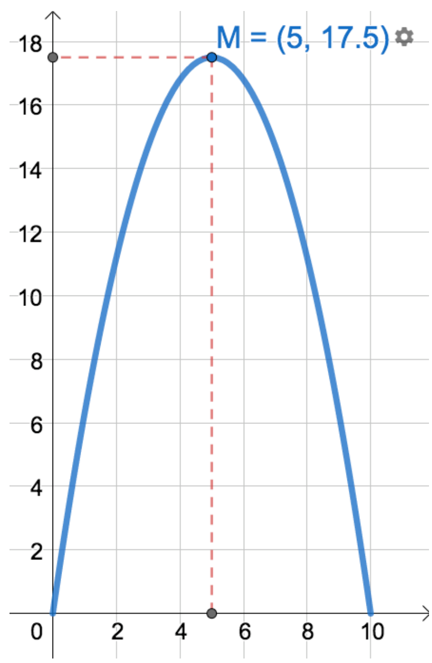
Les droites (DM) et (AB) sont parallèles puisque AEMD est un rectangle. On peut donc appliquer le théorème de Thalès dans le rectangle CAB :

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DM}{AB} \Rightarrow \frac{CA - AD}{CA} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{7 - AD}{7} = \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$$10(7 - AD) = 7x \Rightarrow 7 - AD = 0{,}7x \Rightarrow AD = 7 - 0{,}7x$$

3. Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$.

L'aire du rectangle AEMD est $AE \times AD$ donc $f(x) = x(7 - 0{,}7x)$



4. Établir le tableau de variation de la fonction $f$.

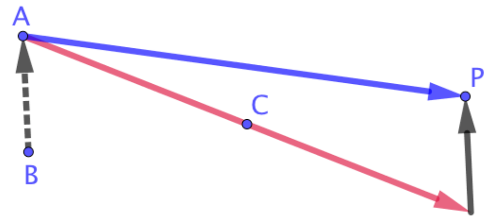
| $x$ | 0 | | 5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | 17,5 | | |
| | 0 | ↗ | | ↘ | 0 |

5. Ou placer le point M pour que l'aire de AEMD soit maximale ?

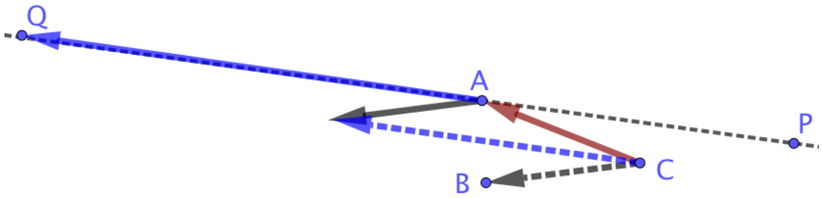
L'aire de AEMD est maximale pour $x = 5$. C'est-à-dire pour un point E au milieu du segment [AB]. Comme les droites (AC) et (EM) sont parallèles, on en déduit que cela correspond à un point M situé au milieu du segment [CB].

**Exercice n°8** (5 points) **:** A, B et C sont trois points non alignés.

1. Placer le point P tel que $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$




2. Placer le point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$




3. Que peut-on conjecturer pour les points P, A et Q ?

Il semble que les trois points soient alignés.

4. En utilisant l'égalité $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$, exprimer $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2}(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2}(-2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$

5. Démontrer ou invalider la conjoncture faite à la question 3.

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}(-2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{2}(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$$