LES NOMBRES RÉELS

I. LES NOMBRES ENTIERS

Définition : L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul.
Exemples : $0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ldots$

Notation : $x \in \mathbb{N}$ x appartient à $\mathbb{N}$ $x \notin \mathbb{N}$ x n'appartient pas à $\mathbb{N}$

Définition : L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul, et de leurs opposés.

$$\ldots \ \mathbf{-4}, \ \mathbf{-3}, \ \mathbf{-2}, \ \mathbf{-1}, \ \mathbf{0}, \ \mathbf{1}, \ \mathbf{2}, \ \mathbf{3}, \ \mathbf{4}, \ldots$$

Conséquence : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (ce lit : $\mathbb{N}$ inclut dans $\mathbb{Z}$)
C'est-à-dire que tous les nombres entiers naturels sont des nombres entiers relatifs.

II. LES NOMBRES RATIONNELS

Définition : L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction.

$$x \in \mathbb{Q} \text{ ssi Il existe } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } x = \frac{a}{b}$$

$$\text{Exemples : } \quad -\frac{27}{4} \quad -\frac{2}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{16\,382}{100}$$

Conséquence : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$**.** Tous les nombres relatifs sont des rationnels.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{Z} \qquad n = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$$

Propriété : Pour tous nombres a, b et k, tels que b et k ne sont pas nuls :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad\qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Définition : simplifier une fraction consiste à trouver une fraction qui lui soit égale avec un numérateur et un dénominateur les plus petits possibles.

Propriété :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } a \times d = b \times c$$

Règles de calcul :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \qquad \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{c}$$

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{k \times a}{b} \qquad\qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Définition : L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10.

$$x \in \mathbb{D} \text{ ssi Il existe } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ tels que } x = \frac{a}{10^n}$$

$$\text{Exemples : } \quad 3{,}14 = \frac{314}{100} \qquad -2{,}9 = -\frac{29}{10}$$

On dit que $\mathbb{D}$ est l'ensemble des fractions décimales

Propriété : Les nombres décimaux sont les nombres négatifs ou positifs possédant un nombre fini de chiffres après la virgule.

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \qquad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D} \qquad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots\text{(infini)}$$

Remarque : L'écriture décimale d'un nombre rationnel est toujours périodique.

Exemples :

$$\frac{2}{11} = 0{,}18\ 18\ 18\ \ldots \qquad \frac{6}{7} = 0{,}857142\ 857142\ \ldots$$

III. LES NOMBRES RÉELS

Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs : les nombres irrationnels. L'ensemble $\mathbb{R}$ regroupe les nombres rationnels et les nombres irrationnels.

Exemples d'irrationnels : $\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \pi$

En résumé : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Définition : Une droite graduée est une droite sur laquelle on fixe :

- un point O appelé origine de la droite graduée ;
- une unité.

Tout point d'une droite graduée peut être repéré par un nombre réel unique appelé son abscisse.

Définition : Les intervalles de nombres réels sont des portions de la droite graduée.

Exemple : L'ensemble de tous les nombres réels compris entre 1 et 5 est l'intervalle noté $[1;5]$. 1 et 5 sont les bornes de l'intervalle.

Définitions :

$$x \in [a;b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b \qquad x \in [a;+\infty[\Leftrightarrow x \geq a$$
$$x \in [a;b[\Leftrightarrow a \leq x < b \qquad x \in]a;+\infty[\Leftrightarrow x > a$$
$$x \in]a;b] \Leftrightarrow a < x \leq b \qquad x \in]-\infty;b] \Leftrightarrow x \leq b$$
$$x \in]a;b[\Leftrightarrow a < x < b \qquad x \in]-\infty;b[\Leftrightarrow x < b$$

Définition : La valeur absolue d'un nombre réel est sa distance à zéro. Soit $a \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de a est notée $|a|$.

Conséquences :

- Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.
- Si $a > 0$ alors $|a| = a$
- Si $a < 0$ alors $|a| = -a$
- $|0| = 0$
- $|-a| = |a|$
- $|a - b| = |b - a|$

Propriété : Soient a et b deux nombres réels, abscisses respectives des points A et B. $|a - b|$ est égale à la distance AB.

Propriété : Soit $b \geq 0$. Dire que $x \in [-b; b]$ est équivalent à $|x| \leq b$.

Propriété : Soient $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Dire que $x \in [a - r; a + r]$ est équivalent à $|x - a| \leq r$.

Définition : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
Le nombre a est une valeur approchée de x à 10^n près si et seulement $|x - a| \leq 10^n$.