ÉQUATIONS DE DROITES ET SYSTÈMES

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ et une base orthonormée $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

I – VECTEUR DIRECTEUR D'UNE DROITE

Définition : Soient une droite d et un vecteur $\vec{u}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d si et seulement s'il existe deux points A et B de d tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.

Conséquences :
- Une droite a une infinité de vecteurs directeurs.
- Tous les vecteurs directeurs d'une droite sont colinéaires entre eux.

Propriété : Soient un point A et un vecteur $\vec{u}$. La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.

II – ÉQUATION CARTESIENNE D'UNE DROITE

Propriété : Toute droite du plan possède une équation cartésienne qui lie l'abscisse x et l'ordonnée y de tout point de cette droite et uniquement les points de cette droite. L'équation cartésienne d'une droite est de la forme : $ax + by + c = 0$ pour laquelle $a,\ b$ et c sont des nombres réels fixes qui dépendent de la droite.

Remarque : L'équation cartésienne d'une droite n'est pas une unique. Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite alors pour tout réel $k \neq 0$, l'équation : $kax + kby + kc = 0$ est aussi une équation cartésienne de la même droite.

Propriété : Si d est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un nombre réel k tel qu'une équation cartésienne de d est $x = k$.

Propriété : Si Si d est une droite parallèle à l'axe des abscisses, alors il existe un nombre réel k tel qu'une équation cartésienne de d est $y = k$.

Propriété : Soient $a,\ b$ et c, trois nombres réels tels que a et b ne soient pas tous les deux nuls. L'ensemble Δ des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}(-b;a)$.

Propriété : Soit une droite d dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ et une droite d' dont une équation cartésienne est $a'x + b'y + c' = 0$.

$$d \parallel d' \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$$

III – ÉQUATION CARTESIENNE RÉDUITE D'UNE DROITE

Propriété & définition : Soit une droite d dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ telle que $b \neq 0$. Alors d possède une équation cartésienne réduite de la forme $y = px + r$.

Remarques :
- Si une droite possède une équation cartésienne réduite, celle-ci est unique.
- Les seules droites à ne pas posséder d'équation cartésienne réduite, sont les droites parallèles à l'axe des ordonnées.

Propriété : Soit une droite d d'équation réduite $y = px + r$, un vecteur directeur de d est $\vec{u}(1;p)$.

Propriété : Soient une droite d d'équation réduite $y = px + r$ et une droite d' d'équation réduite $y = p'x + r'$. $d \parallel d' \Leftrightarrow p = p'$

Propriété : La pente d'une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}(a; b)$ est égale à $\frac{b}{a}$

IV – SYSTEME DE DEUX EQUATIONS LINEAIRES A DEUX INCONNUES

a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels donnés. On suppose de plus que $(a; b) \neq (0; 0)$ et que $(a'; b') \neq (0; 0)$.

Définition : On appelle système de deux équations linéaires à deux inconnues la donnée simultanée de deux équations du premier degré à deux inconnues :

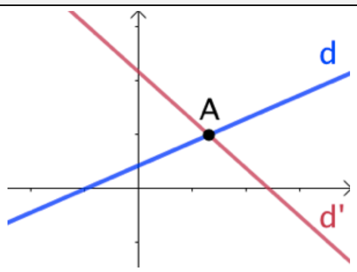
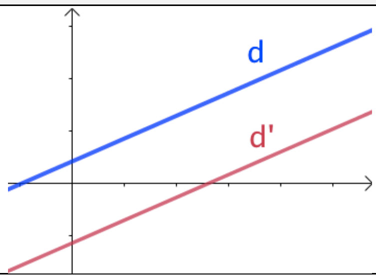
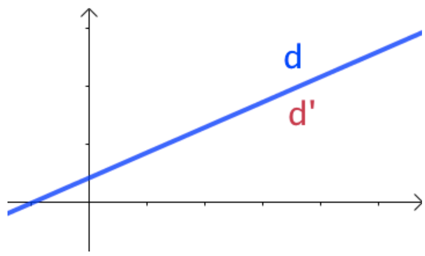
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Un couple $(x; y)$ est solution du système si et seulement si x et y vérifient les deux égalités du système.

1) Résolution géométrique de (S)

$$(S) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by - c = 0 \\ a'x + b'y - c' = 0 \end{cases}$$

Soient les droites (d) et (d') d'équation cartésienne respective : $ax + by - c = 0$ et $a'x + b'y - c' = 0$
Le couple $(x; y)$ est une solution de (S) si et seulement si le point $M(x; y)$ appartient aux droites (d) et (d').

$(\boldsymbol{d})$ **et** $(\boldsymbol{d'})$ **sont sécantes** (S) a une seule solution : les coordonnées de leur point d'intersection	$(\boldsymbol{d}) \parallel (\boldsymbol{d'})$ (S) n'a pas de solution	$(\boldsymbol{d})$ **et** $(\boldsymbol{d'})$ **sont confondues** (S) a une infinité de solutions : les coordonnées de tous les points de d.
		

2) Résolution algébrique de (S)

Propriété :
Le système (S) admet un couple de nombres réels comme solution unique si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.

a) Résolution par la méthode des substitutions : Cette méthode est efficace si l'un au moins des nombres a, a', b ou b' est égal à 1.
Par exemple, supposons que le coefficient devant le x de la première équation est 1. On utilise la méthode de substitution qui consiste à :

- exprimer x en fonction de y puis
- remplacer le x de la seconde équation par l'expression en fonction de y.

b) Résolution par la méthode des combinaisons : Cette méthode doit être utilisée si la méthode par substitutions n'est pas applicable. Elle consiste à :

- multiplier par un même nombre les deux membres de la première équation ;
- (option) multiplier par un même autre nombre les deux membres de la seconde équation ;
- additionner ou soustraire terme à terme les deux équations pour obtenir une troisième équation où ne subsiste qu'une seule des deux inconnues x ou y.