PROBABILITÉS

I – VOCABULAIRE ET DÉFINITIONS

- Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.
- L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes ses issues possibles. On le note Ω.
- Définir une loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est choisir la probabilité de réalisation de chaque issue de cette expérience.
- Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Propriétés : Étant donnée une expérience aléatoire,
- la probabilité de chaque issue est un nombre compris entre 0 et 1.
- la somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

Définition : si dans une expérience aléatoire, toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser, on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité.

Propriété : En situation d'équiprobabilité, si l'univers est composé de n issues, la probabilité de chaque issue est :

$$p = \frac{1}{n}$$

Définitions :
- Un évènement A est un sous-ensemble de l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
- Dire qu'une issue x de Ω réalise l'évènement A signifie que x est un élément de A.
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est appelé évènement impossible : aucune issue n'appartient à cet ensemble.
- L'univers Ω est l'évènement qui contient toutes les issues. Il est appelé évènement certain.

II – CALCULS DE PROBABILITÉS

Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses d'équiprobabilité : lancer d'une pièce ou d'un dé non pipé, tirer une boule au hasard dans une urne, … Il peut résulter aussi de la réalisation de l'expérience aléatoire un grand nombre de fois. On observe alors que la fréquence de chaque issue se stabilise vers un nombre que l'on choisit pour probabilité de cette issue.

Définition : La probabilité d'un évènement A, notée P(A), est la somme des probabilités des issues réalisant A.

Conséquences : $\boldsymbol{P}(\emptyset) = 0$ $P(\Omega) = 1$ Pour tout évènement A, $0 \leq P(A) \leq 1$

Propriété : En situation d'équiprobabilité pour un univers Ω, La probabilité d'un évènement A est :

$$\frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

Définition : Soit A un évènement de l'univers Ω. L'évènement contraire de A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note $\bar{A}$.

Conséquences : Pour tout évènement A : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Définitions :

- L'intersection des évènements A et B est l'évènement formé des issues qui réalisent à la fois l'évènement A et l'évènement B et que l'on note : $C = A \cap B$.
- La réunion des évènements A et B est l'évènement formé des issues qui réalisent l'évènement A uniquement ou l'évènement B uniquement ou les deux évènements. On le note : $A \cup B$.

Propriétés : Pour tout évènement A $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup \bar{A} = \Omega$

Définition : Deux évènements A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent être réalisés tous les deux simultanément, c'est-à-dire que A et B n'ont aucune issue en commun. On écrit : $A \cap B = \emptyset$.

Conséquences : Si deux évènements A et B sont incompatibles, alors

- $P(A \cap B) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriété : La probabilité de l'union de deux évènements A et B est :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Définition : Un arbre des probabilités permet de décrire graphiquement une expérience aléatoire comportant plusieurs épreuves puis de calculer des probabilités d'évènements liés à cette expérience.

MANQUE TABLEAU À DOUBLE ENTRÉE

VI – ÉCHANTILLONNAGE

Lorsqu'on étudie une grande population, il est parfois impossible de récolter toutes les données. On restreint cette étude à une partie de la population. Dans le reste du chapitre, on considère une expérience aléatoire à deux issues possibles que l'on répète plusieurs fois.

Définitions :

- On dit que l'on répète une expérience aléatoire de façon indépendante lorsque le résultat de chaque expérience ne dépend pas des résultats des expériences précédentes.
- Un échantillon de taille n est la liste des résultats obtenus lorsqu'on répète n fois une même expérience aléatoire de façon indépendante.
- Un échantillon de taille n est la liste des résultats obtenus lorsqu'on répète n fois une même expérience aléatoire de façon indépendante.
- Sur plusieurs échantillons de même taille, la fréquence d'un caractère observé varie d'un échantillon à l'autre. C'est ce que l'on appelle la fluctuation d'échantillonnage.

On étudie le caractère d'une population donnée et on appelle p la proportion théorique d'individus présentant ce caractère dans la population totale. On ne connait pas la valeur de p. On cherche à donner une estimation de p en minimisant le risque d'erreur en étudiant un échantillon pour lequel la fréquence observée du caractère est f.

Estimation d'une proportion $\boldsymbol{p}$ par une fréquence observée sur un échantillon (propriété admise) :
La fréquence observée f d'individus présentant le caractère étudié dans un échantillon de taille n suffisamment importante, est telle que dans une grande majorité des cas :

$$|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{p}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{f}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$